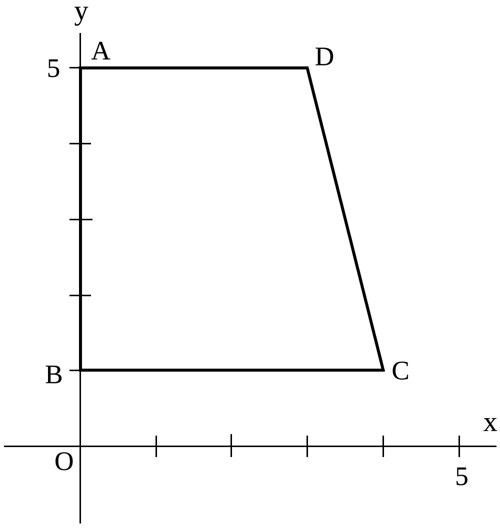
勉強応援掲示板の質問に答えて　　　　　ウロコ先生

質問　　　　　**投稿者：かき**　　**投稿日：**2004/12/06(Mon) 01:46 No.513

いつの年の問題か分からないのですが、長野県の入試問題で一次関数の台形についての問題で、$y = 2x + a$ **の直線が台形の面積を二等分するときの** a **の値を求めなさいという問題がわかりません。ウロコ流でといてみたいのですが教えてください。**

平成 8 年度の長野県高校入試問題の $\boxed{3}$ です。直接のご質問はその(3)ですが、一応その問題全文を載せておきます。

$\boxed{3}$ 図のように，4 点 A(0，5)，B(0，1)，C(4，1)，D(3，5)を頂点とする台形 ABCD がある。この台形と一次関数 $y = 2x + a$ ……① について、下の各問いに答えなさい。



(1) この台形の面積を求めなさい。

答え． 14

(2) ①のグラフが点 D を通るとき，

ア　a の値を求めなさい。

答え． －1

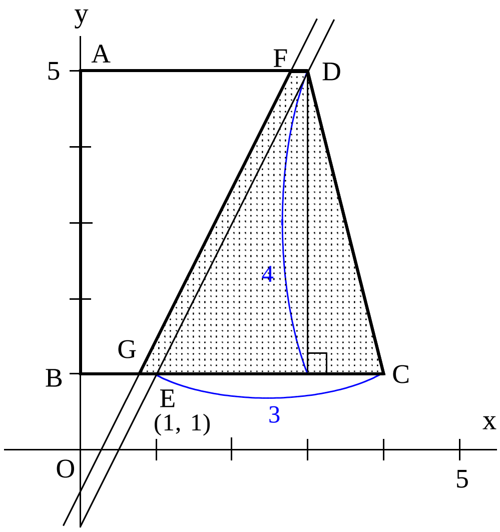
イ　このグラフと辺 BC との交点の座標を求めなさい。

答え． (1，1)

(3) ①のグラフがこの台形の面積を二等分するとき，a の値を求めなさい。

ご質問の(3)のみ、3 とおりの解き方でくわしく解説します。

(3) ①のグラフがこの台形の面積を二等分するとき，ａの値を求めなさい。



(1)【ある市販教材の模範解説…転載】

△DEC の面積は $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$,

したがって，台形 ABCD の面積を 2 等分する直線を FG とする。

台形 FGCD の面積が 7 だから、平行四辺形 FGED の面積が 1。

よって，$GE=\frac{1}{4}$，$BG=\frac{3}{4}$ になるので

$y=2x+a$ に，$x=\frac{3}{4}$　$y=1$ を代入して，a を求める。

ウロコ先生　注.

「台形 FGCD の面積が 7 だから、平行四辺形 FGED の面積が 1。」

台形 ABCD の面積は(1)より 14。FG はその面積を 2 等分するので、台形 FGCD の面積は 7 になる。

そして、$\triangle DEC=6$ なので、平行四辺形 FGED の面積が 1。

平行四辺形 FGED の高さは 4 だから、底辺 GE は $\frac{1}{4}$ でなければならない。

すると、E(1, 1)より、$G(\frac{3}{4}, 1)$。

これを方程式流に、$y=2x+a$　に代入して、a を求めている。

$$1=2\times\frac{3}{4}+a \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

ここにあるのは、【方程式流】の基本的発想、「面積なら、ひたすら面積を計算して、その数値を利用して、解答に結びつける」という方向性です。

(3)にあるのは、(1)や(2)を使って(3)を解くからで、(1)や(2)がなくていきなり(3)を出題されたら、(1),(2)を計算してからでないとできません。

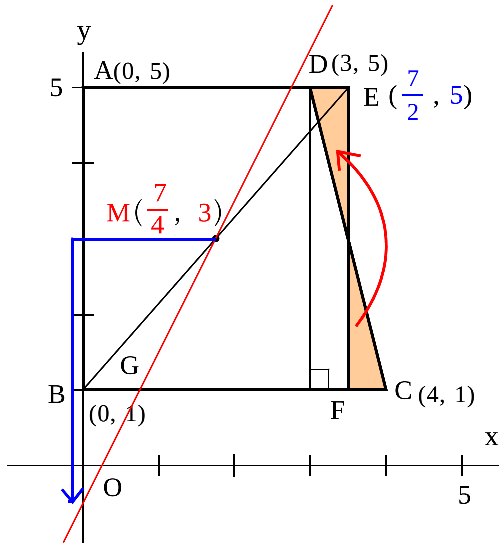
(2)【ウロコ流，その 1 …等積変形－図形応用式】

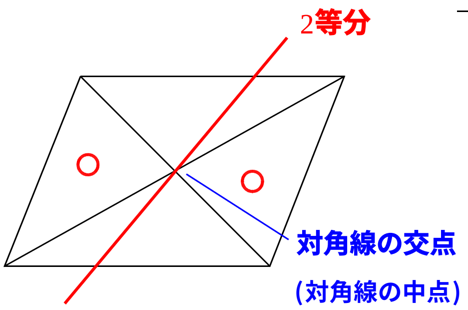
「目からウロコの数学講座・中学関数・(株)文理」の P78 以下に紹介した『等積変形』を使います。

(3) ①のグラフがこの台形の面積を二等分するとき，a の値を求めなさい。

この問題がやっかいなのは、四角形 ABCD が台形だからです。

これが、長方形や平行四辺形なら、話は簡単！…なぜなら、長方形や平行四辺形なら、その対角線の交点を通る直線は、その四角形の面積を 2 等分するから、対角線の交点の座標を求めれば、直線の式は出るからです。





〔 見 通 し 〕

↑上図のように等積変形する。

台形が長方形 ABFE に変わった。

長方形の対角線の交点は、

BE の中点 M である。

M を通る傾き 2 の直線の切片が a

E の座標 ：$(\frac{3+4}{2},\ 5) = (\frac{7}{2},\ 5)$

分子が $\frac{7}{2}$ ，分母が 2、つまり $\frac{7}{2} \div 2$ の意味です

M の座標 ：$\left(\frac{\frac{7}{2}}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) = (\frac{7}{4},\ 3)$ ← **中点は、2 つの座標を足して 2 で割る**

M を通る傾き 2 の直線の切片 ：

$\frac{7}{4}$

$\frac{7}{2}$ 2倍

ウロコ流切片の出し方から、切片は、

3 よりも $\frac{7}{2}$ だけ下の数。

$$a = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

◎この作業は、パッパとやれば 1 分かからないでしょう。

(3)【ウロコ流，その 2 …動点問題化グラフ流】

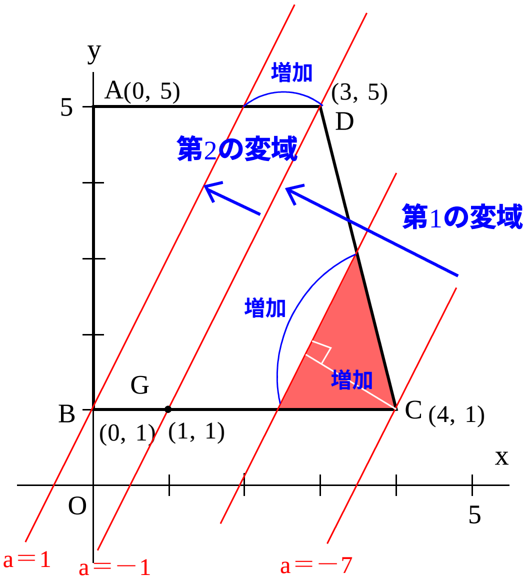
（どうてんもんだいか）

ウロコ流,その 1 よりは時間がかかる(ともいえないが)が、こんな考え方もできる。いろいろ考えておくと、問題次第, そこの数字次第で、**「どの解法がこの場合は一番ラクか？」を選ぶ楽しみ**が残ります。

(3) ①のグラフがこの台形の面積を二等分するとき, a の値を求めなさい。

台形の面積が 14 であることを前提に、①の直線が C を通るときをスタートとして、①をだんだん上にずらしていき、台形の右下側と直線①で囲まれる図形の面積をグラフにとる。そのとき、もちろんグラフはウロコ流の「変域の境目ごとの数字だけ計算」流である。この図形の面積が 7 になるところをさがすだけ。

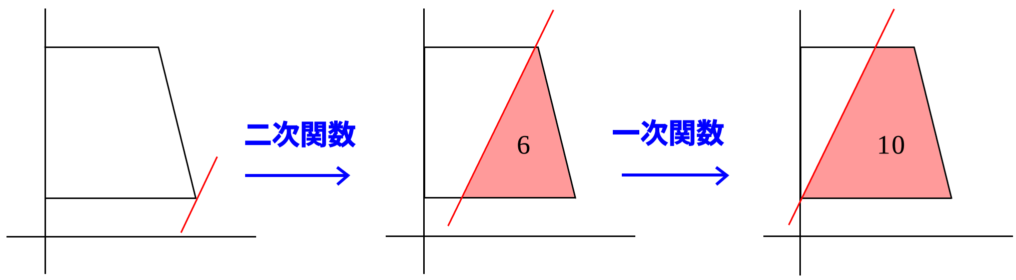
この面積を S とすると、



(1)切片 a ＝－ 7 のとき　　(2)a ＝－ 1 のとき　　(3)a ＝ 1 のとき

S ＝ 0　　S ＝ 6　　S ＝ 10

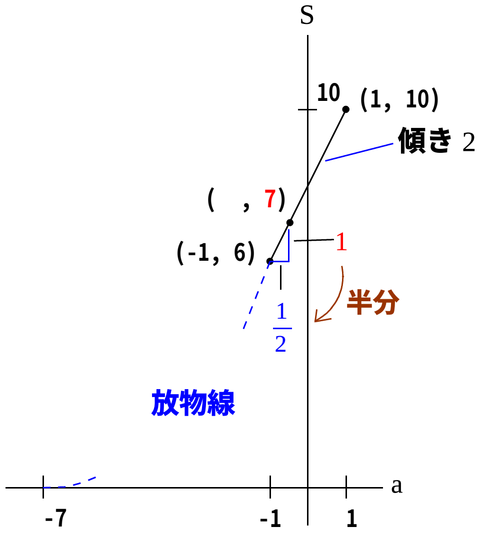
［ 各点を通るときの切片 a は、ウロコ流読者なら、傾き利用で、目で追って出せるでしょう。 2倍 ］



また、**第 1 の変域では**三角形となり、底辺, 高さともに増加するから、増加×増加＝(増加)^2 となって、**二次関数**である。**→放物線**

第 2 の変域では、その三角形に平行四辺形が付加されただけで、平行四辺形の高さは変わらず、底辺が増加するだけだから、**一次関数**。**→直線**

以上からグラフを作成すると、



ここから、$S = 7$ のときは、

a は-1 より $\frac{1}{2}$ だけ右、

つまり、$a = -\frac{1}{2}$ であることがわかる。

ウロコ流, その 2 は、ずいぶん複雑そうに思えたことでしょう。

以上 3 とおりの解き方を解説しました。

さて、解説を含めながらやってきたので、それぞれが長い説明になりました。

ウロコ先生自身がこの 3 とおりでやったとして、1 番速くできるのは？

驚くなかれ、【ウロコ流, その 2 …グラフ流】なのです。

みなさんは、ウロコ流で切片を出すときには、始めは方程式流よりも遅かったはずです。ところが、慣れるに従って方程式流よりも速くなった。

それと同じで、無駄な思考がなくなり、ポイントだけに目が行くようになると、頭の中にグラフをかくと、これは『暗算問題』になってしまうのです。

ま、だからと言って、無理に暗算でやる必要もありませんが…

方程式流と、等積変形流はいくらなんでも暗算ではできません。

『慣れたら速くできるようになる方法』が、ウロコ先生は Best だと思っています。この水準まで来ると素晴らしいですね。

以上、かきさんのご要望にお応えして、ウロコ流の 2 方法をご紹介しました。