

質問

投稿者：かき

投稿日：2004/12/06(Mon) 01:46 No.513

いつの年の問題か分からないのですが、長野県の入試問題で一次関数の台形についての問題で、 $y = 2x + a$ の直線が台形の面積を二等分するときのaの値を求めなさいという問題がわかりません。ウロコ流でといてみたいのですが教えてください。

平成8年度の長野県高校入試問題の 3 です。直接のご質問はその(3)ですが、一応その問題全文を載せておきます。

3 図のように、4点A(0, 5), B(0, 1), C(4, 1), D(3, 5)を頂点とする台形ABCDがある。この台形と一次関数 $y = 2x + a$ について、下の各問いに答えなさい。

(1) この台形の面積を求めなさい。

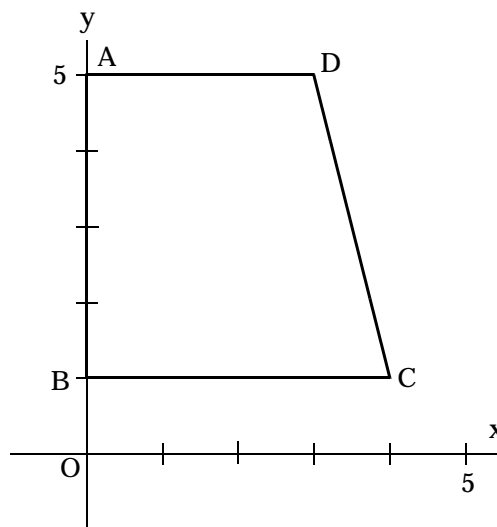
答え . 14

(2) のグラフが点Dを通るとき、
ア aの値を求めなさい。

答え . - 1

イ このグラフと辺BCとの交点の座標を求めなさい。

答え . (1, 1)



(3) のグラフがこの台形の面積を二等分するとき、aの値を求めなさい。

ご質問の(3)のみ、**3とおりの解き方**でくわしく解説します。

(3) のグラフがこの台形の面積を二等分するとき、 a の値を求めなさい。

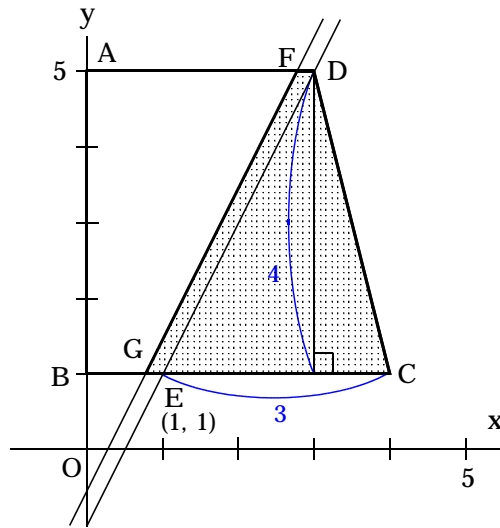
(1) 【ある市販教材の模範解説...転載】

DECの面積は $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,
したがって、台形 ABCD の面積を 2 等分
する直線を FG とする。

台形 FGCD の面積が 7 だから、平行四
辺形 FGED の面積が 1。

よって、 $GE = \frac{1}{4}$, $BG = \frac{3}{4}$ になる
ので

$y = 2x + a$ に、 $x = \frac{3}{4}$ $y = 1$ を代入
して、 a を求める。



ウロコ先生 注 .

「台形 FGCD の面積が 7 だから、平行四辺形 FGED の面積が 1。」

台形 ABCD の面積は(1)より 14。FG はその面積を 2 等分するので、台形 FGCD の面積は 7 になる。

そして、 $DEC = 6$ なので、平行四辺形 FGED の面積が 1。

平行四辺形 FGED の高さは 4 だから、底辺 GE は $\frac{1}{4}$ でなければならない。

すると、E(1, 1)より、 $G(\frac{3}{4}, 1)$ 。

これを方程式流に、 $y = 2x + a$ に代入して、 a を求めている。

$$1 = 2 \times \frac{3}{4} + a \quad \underline{a = -\frac{1}{2}}$$

ここにあるのは、【方程式流】の基本的発想、「面積なら、ひたすら面積を計算して、その数値を利用して、解答に結びつける」という方向性です。

(3)にあるのは、(1)や(2)を使って(3)を解くからで、(1)や(2)がなくていきなり(3)を出題されたら、(1),(2)を計算してからでないといけません。

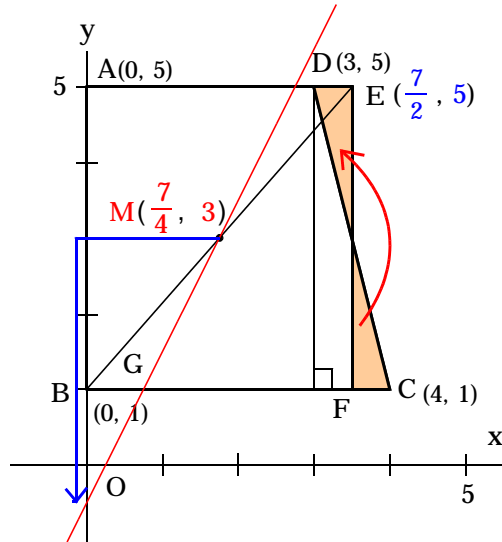
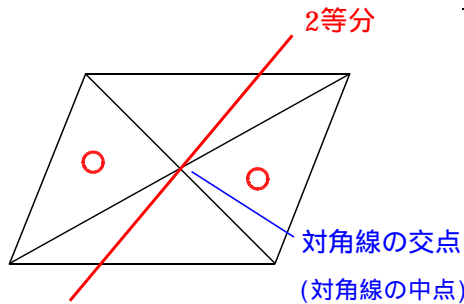
(2) 【ウロコ流, その1...^{とうせきへんけい}等積変形 - ^{すけいおうようしき}図形応用式】

「目からウロコの数学講座・中学関数・(株)文理」の P78 以下に紹介した『^{とうせきへんけい}等積変形』を使います。

(3) のグラフがこの台形の面積を二等分するとき、 a の値を求めなさい。

この問題がやっかいなのは、四角形 ABCD が台形だからです。

これが、長方形や平行四辺形なら、話は簡単!...なぜなら、長方形や平行四辺形なら、その対角線の交点を通る直線は、その四角形の面積を 2 等分するから、対角線の交点の座標を求めれば、直線の式は出るからです。



【見直し】

上図のように等積変形する。
 台形が長方形 ABFE に変わった。
 長方形の対角線の交点は、
 BE の中点 M である。
 M を通る傾き 2 の直線の切片が a

E の座標 : $(\frac{3+4}{2}, 5) = (\frac{7}{2}, 5)$

M の座標 : $(\frac{7}{2}, \frac{1+5}{2}) = (\frac{7}{4}, 3)$ 分子が $\frac{7}{2}$, 分母が 2, つまり $\frac{7}{2} \div 2$ の意味です 中点は、2 つの座標を足して 2 で割る

M を通る傾き 2 の直線の切片 : $\frac{7}{4}$
 $\frac{7}{2}$ 2倍

ウロコ流切片の出し方から、切片は、
 3 よりも $\frac{7}{2}$ だけ下の数。

$$a = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

この作業は、パッパとやれば 1 分かからないでしょう。

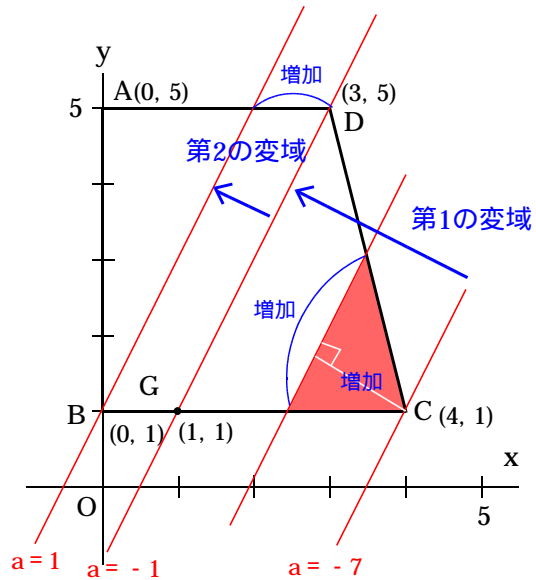
(3) 【ウロコ流, その2 ...^{どうてんもんだいが}動点問題化グラフ流】

ウロコ流, その1よりは時間がかかる(ともいえないが)が、こんな考え方もできる。
 いろいろ考えておくと、問題次第、その数字次第で、「どの解法がこの場合は一番ラクか？」を選ぶ楽しみが残ります。

(3) のグラフがこの台形の面積を二等分するとき、 a の値を求めなさい。

台形の面積が14であることを前提に、
 の直線がCを通るときをスタートとして、
 をだんだん上にずらしていき、台形の右下
 側と直線 で囲まれる図形の面積をグラフに
 とる。そのとき、もちろんグラフはウロコ流
 の「変域の境目ごとの数字だけ計算」流であ
 る。この図形の面積が7になるところをさが
 すだけ。

この面積を S とすると、



(1) 切片 $a = -7$ のとき

$$S = 0$$

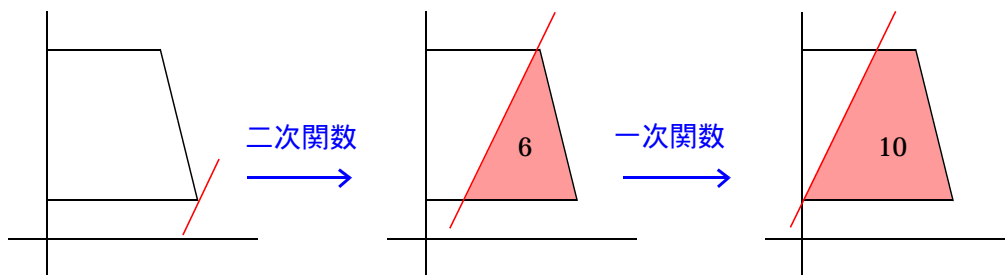
(2) $a = -1$ のとき

$$S = 6$$

(3) $a = 1$ のとき

$$S = 10$$

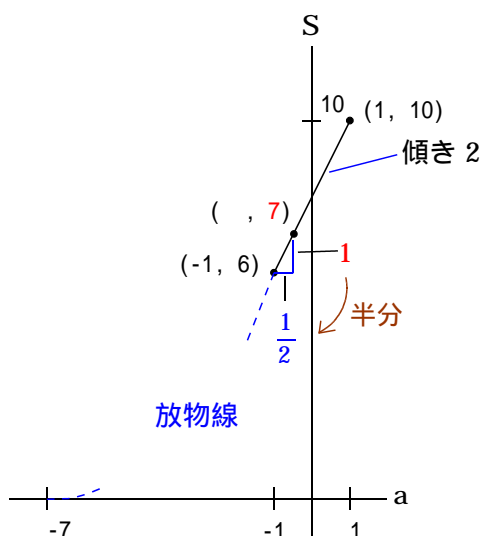
各点を通るとき切片 a は、ウロコ流読者なら、傾き利用で、目で追って出せるでしょう。 ↓ 2倍



また、**第1の変域**では三角形となり、底辺、高さともに増加するから、
 増加 × 増加 = (増加)² となって、**二次関数**である。 **放物線**

第2の変域では、その三角形に平行四辺形が付加されただけで、平行四辺形の高さは変
 わらず、底辺が増加するだけだから、**一次関数**。 **直線**

以上からグラフを作成すると、



ここから、 $S = 7$ のときは、
 a は -1 より $\frac{1}{2}$ だけ右、

つまり、 $a = -\frac{1}{2}$ であることがわかる。

ウロコ流, その2は、ずいぶん複雑そうに思えたことでしょう。

以上3とおりの解き方を解説しました。

さて、解説を含めながらやってきたので、それぞれが長い説明になりました。

ウロコ先生自身がこの3とおりでやったとして、1番速くできるのは？

驚くなかれ、【ウロコ流, その2...グラフ流】なのです。

みなさんは、ウロコ流で切片を出すときには、始めは方程式流よりも遅かったはずですが、ところが、慣れるに従って方程式流よりも速くなった。

それと同じで、無駄な思考がなくなり、ポイントだけに目が行くようになると、頭の中にグラフをかくと、これは『暗算問題』になってしまうのです。

ま、だからと言って、無理に暗算でやる必要もありませんが...

方程式流と、等積変形流はいくらなんでも暗算ではできません。

『慣れたら速くできるようになる方法』が、ウロコ先生はBestだと思っています。この水準まで来ると素晴らしいですね。

以上、かきさんのご要望にお応えして、ウロコ流の2方法をご紹介します。