

< 無料版 > 有料版 31 ページの内 10 ページを公開

目からウロコの高校数学講座

第 1 講座

推理式で攻略する 展開と因数分解

高校数学においても計算力、特に展開と因数分解は重要だ。

しかし、教科書どおりのやり方での練習は、あまりの退屈さに君はたえられないだろう。この講座は複雑な展開や因数分解を「推理して計算結果を予想し、暗算する」というかなり型破りな方法を紹介する。

難関大学合格者を多数輩出した筆者の秘伝の解法だ。

トップクラスを目指す君にはなくてはならないテキストになるだろう。

考える学習をすすめる会

学陽舎塾長 城内貴夫 著

考える学習をすすめる会の公式サイト

勉強法に関する無料情報が盛りだくさんです <http://kangaeu.org>

展開・因数分解の重要性

高校数学の計算力の基本は「展開・因数分解」が自由自在にできるということです。ほとんどの問題なら、「式を見ただけでだいたいの答えの見当がつく！」、ここまでいかないと本物ではありません。

なぜ私がここまで「展開・因数分解」を重要視するかといえば、それは単に「展開しなさい」とか「因数分解しなさい」という問題が解けるという次元のことではないからです。こんなことは出来てあたりまえのことです。

高校数学の計算は、「式を自分の欲しい形に変形し、つじつまがあわない部分はあとからつじつまが合うように調整する」という、『式の変形力』をつけることが目的です。いろいろな整数問題ばかり、二次関数や三次関数ばかり、数列計算ばかり、微分・積分ばかり、などなど...

元の式をこれらに適した形に変形するには、部分的に展開・因数分解の力が不足しているとできるものではありません。これらに最も多用されるテクニックが、展開・因数分解のテクニックを組み合わせるということなのです。

従来の「展開・因数分解」の単元の解説は、私(ウロコ流)にとってはあまりに機械的すぎて不満なものだらけでした。公式の説明にしても、「これじゃ計算してみないと最終形が判断できないというのかい?」「そんなことは計算する前から見ればわかることじゃないか!」、こう言いたくなることのオンパレード。

本書では、「感性でわかる部分は感性で処理してしまおう、そしてわからない部分だけ理屈や地道な計算で結果を出そう!」という叫びで、数学的感覚を使う計算を高校生の皆さまにわかっていただきたい気持ちから執筆しました。

ウロコ流精神の高校数学版第1号です。さあ、ついてきてください。

ウロコ先生(城内貴夫)

本書の内容でのご質問はメールで右記(学陽舎)へ。 ptxwh800@ybb.ne.jp

第1部 展開

§ 1 式の整理の基本...「降べき整理」

数学が一番単純な美学

数学は1つの美学です。計算は、その方法も、形も美しくなければ数学ではありません。そして、多項式を整理する基本は、各項を「降べき整理」することです。

いわば整理の美学一番の基本方法が降べき整理で、どんな式を見ても真っ先に“降べき整理したい!、しないと気持ち悪くて夜も眠れない!”となって欲しいもの...

降べき整理とは?

「降」は降りる、降ろす(上 下)、それでは「べき」は?...「冪」という難しい漢字なのでふつうはひらがなにしていますが“累乗(何乗,同じものをかける)”という意味です。だから“降べき整理”とは「何乗(ふつうは指数で表す)という項を、指数に従って高い方から低い方へ順に整理していくこと」という意味になります。

[例] x について降べき整理すると、

$$\begin{array}{l} -2x + 4 + x^2 \quad x^2 - 2x + 4 \\ 4x - x^3 + 7 - 3x^2 \quad -x^3 - 3x^2 + 4x + 7 \end{array}$$

x が見つからない項を「定数項」と言う。

§ 2 展開公式...公式の成り立ちを理屈で理解しよう!

(1) 共通因数形...分配法則

$$a(b - c) = ab - ac$$

x

これは共通因数の a を()内の b, - c にそれぞれ分配してかけてやれば良いから、問題ないだろう。

(2)開いたら 2 乗の形になる展開公式

2 乗形

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

〔証明〕

その 1 【機械的計算法】...ただ、このように計算して整理してもね～？

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a) & (x - a)^2 &= (x - a)(x - a) \\ &= x^2 + ax + ax + a^2 & &= x^2 - ax - ax + a^2 \\ &= x^2 + 2ax + a^2 & &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

ここには「結果を推理する喜び」はありません。

その 2 【ウロコ流】...結果を推理しよう！

$$(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$$

ここから分配法則を使うことになるが、
() 2 つの掛け算だから、文字は必ず 2 つ
になる。(x が 2 個, x と a, a が 2 個)

〔展開整理したときの項の確定, 符号の確定〕

$$= x^2 \quad x \quad \text{定数項} \quad \text{の順になるはず。}$$

x^2 の項... $x \cdot x$ の 1 回だけだから x^2
定数項... $(-a) \cdot (-a)$ の 1 回だけだから $+a^2$ ここまではラク
 x の項... 2 乗なら、真ん中の $x \cdot (-a)$ は、2 回計算する。
だから、 $-ax$ が 2 回で $-2ax$
「 \cdot 」は高校では \times の意味で使う

以上から

同様に

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

このように「推理する」を大切にしないと、因数分解が苦手になる！

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

これを公式として覚えても役にたちません。+しかないから、
 すべての項は符号が+になることがわかりきっているので...
 そこで $(a + b - c)^2 =$ を考えます。

〔 3つの項の2乗形(1つの公式として) 〕

【その1(正直流)】 下図のように1つ1つかけていけばできる。合計9個の項。

やる気がしない。

$$(a + b - c)^2 = (a + b - c)(a + b - c)$$

$$= a^2 + ab - ca + ab + b^2 \dots \dots \dots$$

【その2(置き換え流)】 ()の中3つの2乗形は知らないが、2つの2乗形は知
 っている。 $a + b = A$ とおけば、 $(A - c)^2$ の形になる。

$$(a + b - c)^2 = (A - c)^2$$

$a + b = A$ とおく

$$= A^2 - 2cA + c^2$$

A をもとに戻す

$$= (a + b)^2 - 2c(a + b) + c^2$$

もう一度計算して整理

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ca - 2bc + c^2$$

形をととのえる

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$$

【その3(ウロコ流)】 「公式をしっかり理解しよう！」と言ったのは、このような
 問題で差がでるから。2段階で考えてしまえばなんてことはない。

(1) 第1段階〔項の確定〕 どのような項が出てくるはずか考える。

$$(a + b - c)^2 = (a + b - c)(a + b - c)$$

$$= a^2 \quad b^2 \quad c^2 \quad ab \quad bc \quad ca$$

上の図を見てわかるとおり、すべて文字2つのかけ算になる。そのかけ算は

【同じ文字どうし】 【違う文字どうし】の2種類である。

(2)第2段階〔各項の符号と係数の確定〕

$$\begin{aligned}(a + b - c)^2 &= (a + b - c)(a + b - c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca\end{aligned}$$

【同じ文字どうし】は1回のかけ算、 $(+a)^2, (+b)^2, (-c)^2$ なので、**符号はすべて+**。

【違う文字どうし】は2回のかけ算、 $a \cdot (+b), (+b) \cdot (-c), (-c) \cdot a$ が各2回で2倍。

理屈がわかれば、これも暗算問題だということです！

〔2乗形の展開公式のちょっとした応用〕...次の計算を下さい。

(1) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$...これは $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ の公式の利用です。

ところが、この公式のまま当てはめると、

$$\begin{aligned}&= (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{6} + 2 \\ &= 5 - 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

で、何か工夫不足。暗算に向かない。

計算では、結果は **がはずれる項**と **が残る項**に分かれるはず。それなら結果を見越して、はずれる項と残る項に分けて計算してしまおう。

がはずれる項... 2乗になる項

が残る項 ...降べき整理したときの真ん中の項

だから、**公式の順番をかえて** $(x - a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax$ で使う。

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 &= \{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= (3 + 2) - 2\sqrt{6} \\ &= 5 - 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

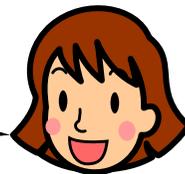
このように考えれば暗算可能！

【類題】 $(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1$
 $= 3 + 2\sqrt{2}$

$$(2) (a - b - c)^2 \qquad (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

このくらいの計算は暗算できなくては困ります。

暗算よ!



〔解答〕

$$\begin{aligned} (a - b - c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \dots \quad \text{ここまではすべて+の2乗が並ぶ} \\ &\quad - 2ab + 2bc - 2ca \quad a, -b, -c \text{の2つの掛け算の2倍が並ぶ} \\ (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 \\ &\quad - 2\sqrt{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= 10 - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

和と差の積 2乗 - 2乗形

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

〔証明〕

$$(x + a)(x - a) = x^2 \quad x \quad \text{定数項} \quad \text{のはず}$$

定数項...(+a)・(-a)だから - a²
xの項...+ax-ax = 0で、消えてしまう

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

たして、かけて形

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ここまで中学で既習

〔証明〕 (x + a)(x + b) = x² x 定数項

xの項... + ax + bx = +(a + b)x, 定数項...(+a)・(+b) = +ab

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

x^2 の係数が 1 にならない形... x の係数たすき型 (新出)

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

〔証明〕 $(ax + b)(cx + d) = acx^2$ x 定数項

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x\text{の項}}$

$$\text{定数項... } (+b) \cdot (+d) = +bd$$

$$x \text{ の項... 内側どうし} \times \text{外側どうし} = + (ad + bc)x$$

$x)$	ax	$+$	b	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
	cx	$+$	d	
	acx^2	$+$	bd	

x の項の係数...**たすき**にかけた形

(3)開いたら 3 乗の形になる展開公式 (新出)

まとめて3乗形

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

こんな公式は、ただ覚え続けられるものではありません！ **理屈で理解しておけば**、覚えたほうがよい部分はおくわずかになります。

以下、理屈は【ウロコ流】のみで通します。【ふつう流】は各自教科書や参考書で確認しておいてください。

$(x + a)^3$ の展開形は、元の式がすべて + で構成されているので展開した各項の符号はすべて + になります。だからここでは - を含む方で理屈を考えます。

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a) \text{ ここで } (x-a)^2 \text{ を計算しようなんて気になるな！}$$

項の確定... 3つの掛け算だから、文字はすべて3個で構成されるはず。

それをxについて降べき整理して考えると、出てくる項は...

x^3	x^2a	xa^2	a^3	これ以外にない
-------	--------	--------	-------	---------

各項の符号の確定... xと(-a)の掛け算である。だから(-a)が奇数個、つまり

奇数乗になる項は-, 偶数乗になる項は+になる。

$+ x^3$	$- x^2a$	$+ xa^2$	$- a^3$
---------	----------	----------	---------

各項の係数の確定... x^3, a^3 の項 1回の掛け算しかしないから 1

x^2a, xa^2 の項 「3乗公式だから3」とこじつけて

覚えよう。

x^3	$- 3x^2a$	$+ 3xa^2$	$- a^3$	できあがり
-------	-----------	-----------	---------	-------

$$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

[3を忘れてしまったら！]

x^3, a^3 の項の符号と係数は理屈で出る。 x^2a, xa^2 の項の符号も理屈で出る。この2つの項の係数を忘れてしまったら、この項に絞って目で追って計算すればよい。

【 x^2a の項】

$$(x - a)(x - a)(x - a) \text{ } x^2a \text{ が 3 回出てくるから 3}$$

xa^2 の項についても同様だ。このように、機械的な計算に入る前に項を絞って目で追う計算をすることは、計算感覚をとても発達させ、暗算能力を高める。

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ については、理屈は $(x - a)^3$ とまったく同じ。符号は左辺に+しかないのだから、右辺に-の項が出るはずがない。すべて+にすればよい。

開いたら3乗 ± 3乗形 (逆方向の因数分解公式として有名)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

今度は左辺が()2つである

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

ことに注意しよう。

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$ すべて文字3つで構成される項になるはずだ。

項の確定... a, b で構成される文字3つの項だから、降べき整理すると

$$+ a^3 \quad a^2b \quad ab^2 \quad + b^3 \quad \text{両端は } a \cdot a^2, (+b) \cdot (+b)^2 \text{ だから}$$

自動的に定まる。

各項の符号, 係数の確定... a^2b と ab^2 の符号と係数の決定。目で追って!

$$\text{【}a^2b\text{】} \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad +a^2b \text{ と } -a^2b \text{ で } 0$$

$$\text{【}ab^2\text{】} \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad +ab^2 \text{ と } -ab^2 \text{ で } 0$$

右の()の $-ab$ は、 a^2b と ab^2 の項を打ち消し合って
消す役割を持っていたのだ!

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$

項の確定... $+ a^3 \quad a^2b \quad ab^2 \quad - b^3$

各項の符号, 係数の確定... a^2b と ab^2 の符号と係数の決定。目で追って!

$$\text{【}a^2b\text{】} \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad +a^2b \text{ と } -a^2b \text{ で } 0$$

$$\text{【}ab^2\text{】} \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad +ab^2 \text{ と } -ab^2 \text{ で } 0$$

右の()の $+ab$ は、 a^2b と ab^2 の項を打ち消し合って
消す役割を持っていたのだ!

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

特殊な開いたら3乗形(逆方向の因数分解公式として有名...進学コース必須)

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

あまりに難しく感じるだろう。1つ1つ開いていったら $3 \times 6 = 18$ の項が出てしまう。ところが【ウロコ流降べき整理法】で考えると、これも“見ればわかる問題”なのだ！

項の確定... a, b, c で構成される文字3つの項だ。 $a^3 + b^3 + c^3$ は絶対ある。

$a^2b, ab^2, b^2c, bc^2, c^2a, ca^2$ の項は？ abc の項は？

これ以外には出てくる項がない。右の()の $-ab - bc - ca$ がくせ者だ。何かありそう！目で追って調べよう!!

各項の符号,係数の確定...

$$\text{【}a^2b\text{】} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{+a^2b} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-a^2b}$
消えた！

$$\text{【}ab^2\text{】} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{+ab^2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-ab^2}$
消えた！

このように形がきれいなものについては、1つのことについて言えることはたいてい似たような他のものについても言えるものだ。

$a^2b, ab^2, b^2c, bc^2, c^2a, ca^2$ の項が、同様に打ち消し合ってすべて消えることを、各自目で追って確かめよ！

$$\text{【}abc\text{】} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-abc} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-abc} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-abc}$

$-abc$ については、打ち消し合うものがないので消えない。

3回出てくるので、 $-3abc$ として残る。

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

(4)公式扱いではないが...こんなくらいは見ただけで！(新出)

$$(A - a)(A - b)(A - c) = A^3 - (a + b + c)A^2 + (ab + bc + ca)A - abc$$

$$(A - a)(A - b)(A - c) =$$

- すべての()に共通に A があるから、展開形も A の降べき形で予想してしまう。
- ()³ 3つの掛け算だから、すべての項は文字が 3 つで構成されているはず。使われる文字は A, - a, - b, - c, の 4 つだ。

項の確定...降べき順に考えると、

A^3 A^2 A 定数項

各項の符号,係数の確定...

- A^3 の係数は + 1, 定数項は $(- a) \cdot (- b) \cdot (- c)$ で $- abc$
 A^3 A^2 A $- abc$
- 【 A^2 の係数と符号】... 3 つの()のうち 2 つから A を取り出すと、残りの()から順次 - a, - b, - c を 1 つずつ取り出す。
 $- a A^2, - b A^2, - c A^2$ となるから、 $-(a+b+c)A^2$
- 【A の係数と符号】... 3 つの()のうち 1 つから A を取り出すと、残りの()から順次 - a, - b, - c を 2 つずつ取り出す。
 $(- a) \cdot (- b)A, (- b) \cdot (- c)A, (- c) \cdot (- a)A$ となる。
 $+(ab + bc + ca)A$ である。

したがって、

$$(A - a)(A - b)(A - c) = A^3 - (a + b + c)A^2 + (ab + bc + ca)A - abc$$

このように、結果を予想して理屈を考えると、暗算問題です。

〔練習問題 1〕 次の式を展開せよ。

(1) $(5x + 4)(3x - 2)$

(2) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

(3) $(a - b - c)^2$

(4) $(2x - 1)^3$

* 以下は有料版をご覧ください。