目からウロコの数学講座シリーズ

トップレベルの数学的感性が身につく理想のテキスト！

# 驚きの計算ミスゼロ作戦

## ＜中学2年＞

(撮影　城内貴夫)

もはや「ミス」とは言わせない！　意味を感じる計算学習

考える学習をすすめる会
学陽舎塾長　城内 貴夫　著

考える学習をすすめる会
http://www.kangaeru.org

# なぜ「計算ミス」が多発するのか？

「**驚きの計算ミスゼロ作戦**」という、とんでもないタイトルの教材を執筆するきっかけとなったのは、**考える学習をすすめる会**のホームページにある**勉強応援掲示板**に寄せられる数学の相談事で「どうしたら計算ミスをなくすことができるのか？」**という質問**が多いことからでした。

ところが、私から見ると**計算ミスというのはめったに起こるものではありません**。**ミスというのは**、例えば疲れているとき、あるいは上の空で計算していて、2 × 3 ＝ 5 とやってしまったような場合です。冷静なときなら 2 × 3 ＝ 6 ですね。このようなとき以外はそれはミスではなく、あなた自身の注意力不足というよりは**数学的感性**の不足、端的に言えば「**実力不足**」なのです。まず素直にこのことを認めましょう。

> 計算では、中２で習うのは**【式の計算】**と**【連立方程式】**の２つが主要なもので、一次関数・図形・確率に少しの計算が出てくるだけです。その意味では中１・中３とくらべて計算分野で学ぶことは少ないと言えます。重点は一次関数と図形です。**一次関数と図形については別の関数シリーズ，図形シリーズで独立させました。**
>
> ここでは**【式の計算】**と**【連立方程式】**を中心に扱います。

**本シリーズは**、「計算『**ミス**』」という言い方を許さなくするために、すなわち「計算『**ミス**』をゼロにする」にはどうすれば良いのかをわかっていただくために書かれました。しっかり**感じる計算ができるようにしましょう**。

# 目　次

# 第５章　確率

## 場合分けや樹形図で１つ１つを数えることを知ろう！

**大幅増補…但し、危険なため、上級者限定**

### はじめに

　**本書初版本では**下記のように書いて、確率の単元を省略しました。

> 　ただし、**中学範囲では確率特有の計算はありません。**本書「計算編」ではとばすことにします。

　中学範囲の確率内容は、すべて「**樹形図**」を使って書き出せば解けるものばかりで、**独特な計算方法を用いる方法は**カットされていたからです。
　とはいえ、確率の解説を望む声が数多く届き、樹形図の方法は本書には馴染まずに苦慮していました。

　その後、ウロコ先生の頼りになる相棒、KAZU 先生が

> 「教科書完全マスターシリーズ　**あしたの数学！中2　確率**」
> （ http://kangaeru.org/math_for_tomorrow.html ）
> …一部見本は　http://kangaeru.org/dlt-toshokan.html　で**閲覧可能**

を書かれ、**樹形図による方法　の解説**は万全になりました。そうすると、ここでの補充は必要なくなります。

　ただ、普通の公立中学のテストや、公立高校入試問題では樹形図で解ける問題に限り出題されるものの、“**樹形図法では時間がかかってやりきれない。計算で解けば速いのに！**”という問題が数多く存在することは確か。また**私立難関高校の入試問題**などには、“特殊法を知らなければ時間切れに直面す

る”というような問題もあります。

**樹形図で場合の数を数え上げていくのは確率の基本中の基本**で、これで解けない問題はないし、場合の数を問題にする確率では、樹形図法がマスターできていなければ困るのです。

KAZU 先生の確率テキストができたのを機会に、本書では**上級編**として、**高校で習う方法**を紹介します。これはある意味では中学数学の**裏技**に属するもの、**樹形図法をまだ完全にマスターしてない人は読まないでください**。また、樹形図法をマスターできた人でも、**本書を読んで途中で頭がゴチャゴチャしてきた人は**、そこで読むのを中止して**基本の樹形図法だけ**に戻ってください。

その意味で、初級～上級までを網羅するウロコ先生のテキストの中で、確率の本章だけは初級者には猛毒になる可能性があり、良薬になるのは上級者に対してだけの危険な内容です。

以上が、この単元の解説にあたって長々と「はじめに」の注意書きを付した理由です。

ではここから先は
上級者のみ閲覧を！

## 確率の求め方

$$\text{ある事柄が起こる確率} = \frac{\text{ある事柄が起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

※　**確率の基本的な意味**については

KAZU 先生の「**あしたの数学！　中２　確率**」**を参照！**

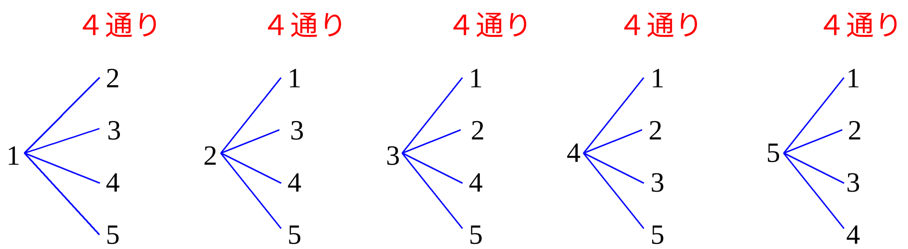
　ということで、分母にも分子にも「・・・の**場合の数**」という言葉が出てきます。ですから「**・・・が起こる場合の数**」を求めることができれば、確率というのは単純（たんじゅん）です。

**〔 例　題 〕**

　1，2，3，4，５の５つの数字を１つずつ記入した５枚のカードがある。このカードから２枚を取り出して２桁の数字をつくる。
　このとき、できた整数が偶数になる確率を求めなさい。

**基本樹形図法**

　まず**分母**に当たる、５つの数字から２つを取り出して**何通りの数字**ができるのかを、樹形図を使って求める。**十の位（くらい）→一の位**の数字にとっていけばよい。




これで４通り × ５ ＝ 20 通り

次に**分子**の、その**２桁（けた）の数字が偶数**になる場合の数は

$1 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$　　$2 — 4$　　$3 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$　　$4 — 2$　　$5 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

これで $2 \times 3 + 2 = 8$ 通り

よって、求める確率 $= \dfrac{8}{20}$

$= \underline{\dfrac{2}{5}}$ と出ます。

## 順列（じゅんれつ）理屈法

このような、ある意味**規則正しい数字の並び方**を問題にしているような場合には、樹形図に慣（な）れた段階ではそろそろ“**ここに何かの規則性があるのではないのか？**”って考えてみたくなりませんか？

そう、あるんです。そうすると樹形図をかかなくて、理屈（りくつ）から式を立てて計算で答えを求めることができるようになります。

**その理屈とは**・・・・今かいた樹形図をもう一度よく観察してくださいね、理屈は自分で気づくことが大切です。

OK かな？

**分母・・・５つの数字から２桁の数字は何通り作れるか？**

樹形図では十のくらいから書き出し、そこには 1 ～ 5 までの数字を当てはめたから、結局５通りの樹形図が必要になったわけですよね。

そしてそれぞれの樹形図で、一の位に書いた数字は、十の位で使った数字以外の４通りの数字が書き出せたわけです。

結局、４通りずつの樹形図が５つできたから４通り×５＝ 20 通り。これをまとめると、**十の位に入る数字は**５通り(1 ～ 5)、そしてその１

つ１つの場合につき、**一の位は**４通り(５つの数字から十の位で使った数字を抜いた５－１通り)。

では、こう考えてもいいんじゃないか？

1　2　3　4　5

**まず、こちらに誰が入るか、何通りあるのかな？**

**十の位のイス**　**一の位のイス**

**次に、こちらに誰が入るか、何通りあるのかな？**

**十の位のイス**　**一の位のイス**

**そして、ここは何算にしたらいいのかな？**

**十の位のイス**　○　**一の位のイス**

考えた結果・・・結論！

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|

まず、こちらに誰が入るか、何通りあるのかな？

| 十の位のイス 5 | 一の位のイス |
|---|---|

1，2，3，4，5 の誰が入ってもいいから5通り。

次に、こちらに誰が入るか、何通りあるのかな？

| 十の位のイス 5 | 一の位のイス 4 |
|---|---|

十の位のイスに入った人以外だから、4通り。

そして、ここは何算にしたらいいのかな？

| 十の位のイス 5 | × | 一の位のイス 4 |
|---|---|---|

十の位に入った場合それぞれに対して一の位の場合があるから、×(かけ算)。

つまり5×4通りがぱっと出ます。

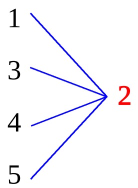
**分子・・・５つの数字から２桁の偶数は何通り作れるか？**

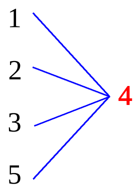
樹形図ではちょっと苦労しましたね(してないか？)。言葉に注意すると、「**偶数**」って条件がついています。つまり無差別な数字ではなく、その数字に限定を加えているのです。

**では偶数ってなに？**　**一の位の数字**が 0，2，4，6，8 になっている数字。十や百の位の数字は何でもよい。

あそこの樹形図は・・・じつはあまり上手な樹形図ではなかったのです。だって条件付けられていない、つまりなんでもよい十の位の数字から始めたから。

**このようにした方が無駄がない**・・・条件付けられた**一の位の数字から始める**。




ね！

４通り× 2

これを**理屈流**にすると、

②　①

$\boxed{4} \times \boxed{2}$ ができあがります。

**十の位 ← 一の位**

右の数字以外　2 か 4 の **２通り**

このように考えると、式は次のようになります。

**求める確率** $= \dfrac{\cancel{4} \times 2}{5 \times \cancel{4}} = \underline{\dfrac{2}{5}}$　式のままの方が約分がラク

## 場合の数…(1) 順列

ということで、確率では分母も分子も「**その起こり得る場合の数**」が問題になっているのでした。

ですから、いろいろな場合の場合の数を如何(いか)に速(はや)く求められるかが、時間勝負になります。そのさい、**樹形図(or 表)をかかなければならないもの**と、**計算で出せるもの**の**２種類**があります。両者織(お)り交(ま)ぜながら、ここでは問題を解きながら、計算で出せるものは計算で出していく方法をとります(なるべく樹形図法でもやりますが)。

〔 類　題　１ 〕…紛(まぎ)らわしい

0，1，2，3，４の５つの数字を１つずつ記入した５枚のカードがある。このカードから２枚を取り出して３桁の数字をつくる。

このとき、次の各問に答えなさい。

(1)　３桁の数字はいくつできるか。

(2)　偶数はいくつできるか。

(3)　奇数はいくつできるか。

(4)　230 よりも大きい数字はいくつできるか。

(5)　できた３桁の数字が奇数である確率を求めなさい。

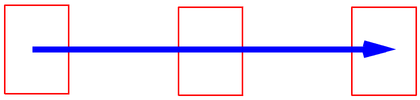
**解説・解答**

先の例題と違うところは、与えられた数字から 5 が抜けて、**0 が加わったこと**です。場合の数や確率の数字の問題で **0 が登場するときは**ちょっと(かなり)**注意**を要します。

(1)　　　0，1，2，3，4

3 桁の数字だから、

百の位　　　十の位　　　一の位



**間(あいだ)は**、1 つ前の場合それぞれに対してだから ×(かける)

**0 以外**の 4 通り　　左で使った以外の 4 通り　　左 2 つで使った以外の 3 通り

$$4 \times 4 \times 3 = \underline{48\text{ 通り}}$$

(2)　偶数はいくつできるか。

**簡単なようだけど**、じつは 0 という曲者(くせもの)のために**落とし穴(あな)**が待っている。・・・**0 君の処遇(しょぐう)**が問題！(0 がなければラク)

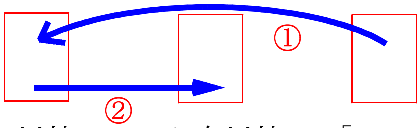
**〔問題点〕**

- 「偶数」という条件から、**一の位から見ていく流れ**だが、その一の位に 0 を使った場合には百の位と十の位に 0 は使わないので問題は起きない。
- 一の位に 0 を使わなかった場合には、0 をどこで使うかが問題→先頭の百の位では使えない。
- だから、**2 つに場合分け**してそのどちらでもよいから 2 つの各場合を足(た)すしかない。

**方針(ほうしん)決定！**

ｉ） 一の位に 0 を使ったとき

百の位　　十の位　　一の位




間(あいだ)は、１つ前の場合それぞれに対してだから×(かける)

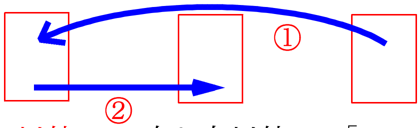
0 以外　　0 と左以外　　「0」の

４通り　　３通り　　１通り

1 × 4 × 3 ＝ 12　通り

ii） 一の位が 2 か 4 のとき

百の位　　十の位　　一の位




間は、１つ前の場合それぞれに対してだから×

0 以外　　右と左以外　　「2or4」の

３通り　　３通り　　２通り

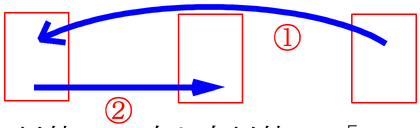
2 × 3 × 3 ＝ 18　通り

ｉ）と ii）から、12 ＋ 18 ＝ 30　通り

(3)　奇数はいくつできるか。

もう要領(ようりょう)がわかりかけているでしょ。「奇数」という条件だから**一の位の数字**から考えて、ここに 0 は使わない。そしてその 0 は百の位でも使えないから、使えるのは十の位でだけ。

百の位　　十の位　　一の位




間は、１つ前の場合それぞれに対してだから×

0 以外　　右と左以外　　「1,3,」の

３通り　　３通り　　２通り

2 × 3 × 3 ＝ 18　通り

〔別解〕

全ての数は奇数か偶数かのどちらか。(1)で全(すべ)ての場合を求め、(2)で偶数の数を求めてあるのだから、

(3)の奇数は→　**全体－偶数**で求められる。

(1)と(2)より、<u>48 － 30 ＝ 18</u>　が最も要領がよい。

(4)　230 よりも大きい数字はいくつできるか。

**このような問題に対処(たいしょ)できるのが本当の実力**。誰がやっても地道(じみち)に場合を分けて考えていくしかないのだ。何でもすぐに立式できて、計算すれば答えが出せるようなインスタント問題ばかりとは限らない。

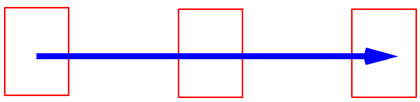
「230 より大きい」ということは、**場合分けしていくと百の位の数字**が最低でも 2 である必要がある。ここが 3 か 4 であれば十以下の位にどんな数字がどのように並ぼうが関係ない。

ところが**百の位が 2 であるときには十の位の数字の配列**が関係してくる。だから百の位が 2 である場合と 3 or 4 である場合を分けて考えなければならないことになる。このようなことを書き出して気づくのが「場合の処理」単元を学ぶ目的。

ということで、２つの場合分け。

ｉ）　百の位の数字が 3 または 4 のとき

百の位　　十の位　　一の位



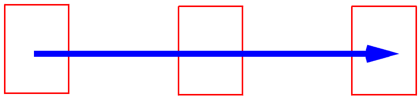
**間は**、１つ前の場合それぞれに対してだから×

3or4 の２通り　　左以外の４通り　　左の２つ以外３通り

$2 \times 4 \times 3 = $ <u>24　通り</u>

ⅱ）　百の位の数字が２のとき

百の位　　　十の位　　　一の位



**間は**、１つ前の場合それぞれに対してだから×

２　　　　３　　　　１ or ４ … ０がダメ

１通り　　１通り　　２通り

$1 \times 1 \times 2 = 2$　通り

２　　　　４　　　　０，１ or ３

１通り　　１通り　　３通り

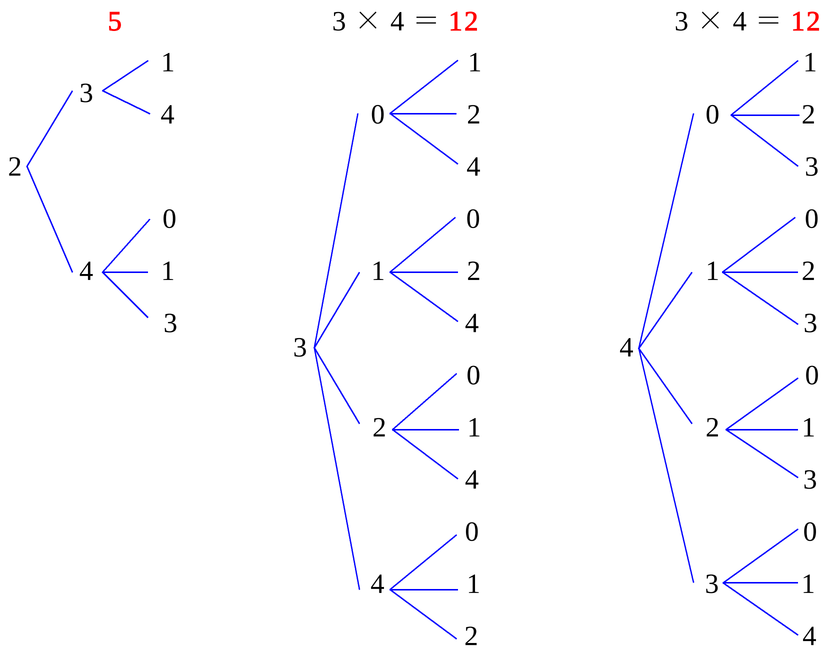
$1 \times 1 \times 3 = 3$　通り

∴ $2 + 3 = 5$ 通り

ⅰ)，ⅱ)より、$24 + 5 =$ <u>29　通り</u>

〔**樹形図法**〕

上のように場合分けして、その中で「OK のものの場合がそれぞれ何通りあるか？」を考え、そして立式するのは“めんどうだ～！”と感じた人がいるかもしれない。**だが樹形図でやると・・・・**



どちらの方がラクと感じるかは、キミ次第(しだい)だ！

(5)　できた３桁の数字が奇数である確率を求めなさい。

これは、全ての数の個数と奇数の個数がすでに求めてあるので、それを使えばよいからラク。

(1)と(3)より、求める確率$=\dfrac{18}{48}=\dfrac{3}{8}$

〔類　題　2〕

男子３人，女子２人を一列に並べる。このとき、次の問いに答えなさい。

(1)　並べ方は全部で何通りあるか。

(2)　両端に男子が来る並べ方は何通りあるか。

(3)　女子二人が隣り合う並び方は何通りあるか。

(4)　男・女・男・女・男，と並ぶ確率を求めなさい。