目からウロコの数学講座

■大好評の目からウロコシリーズの第６弾

図形と証明

<<第６講座>>

図形総合入試問題編

「これで君は図形問題の達人だ！」

考える学習をすすめる会

http:// kangaeru.org/

学陽舎塾長 城内 貴夫-著

は・じ・め・に

　この第6講座は、全国の国公立・私立高校の入試問題から「総合問題」を取り出して解説したものです。

　それだけならば、類書(るいしょ)はいくらでも市販されています。あらためてウロコ先生が本書を書く意義はないでしょう。**私が類書を見ていつも感じるのは**、「*こうすればこの問題は解けるよ*」的(てき)解説ばかりで、「***なぜそのような考え方が思いついたのか!***」,「***なぜそのようなヒラメキ(?)が生まれたのか!?***」と、『**解説以前の解説**』**が全(まった)く無いこと**です。

　それでは図形問題は単に「ひらめく人だけのもの」になってしまうではありませんか!

　そのようなことに不満を感じている受験生は多いでしょう。そこで私は**ふだん学陽舎の塾生に教えているとおりの形をこのテキストで再現しました**。だから**ページ数の割に取り上げた問題数は少ないです**。しかしやっていけばわかるように**図が問題に応じて次から次へと変化し、多用されています**。総合問題を1つの図で済(す)まそうとすること自体(じたい)無理な話です。

　私のテキストは問題数を売り物にはしていません。**「考え方」を売り物にしています**。**数学の極意(ごくい)は**たくさんの問題を解くことではなく、「**1つ1つの問題をいかに多面的(ためんてき)に考えて解くか**」**にあります**。このテキストでその極意をしっかりつかんでくださいね。そして入試の図形問題に自信を持って臨(のぞ)んでください。

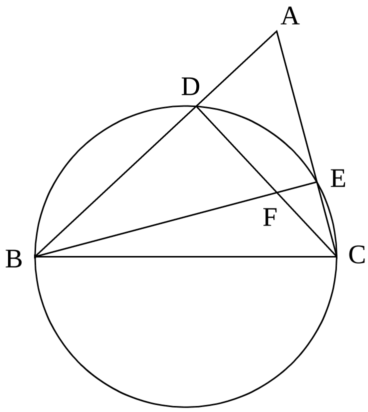
さあっ、ついてきてください！！

＝ 第６講座　の目次 ＝

第１部　実力診断１問

[実力診断問題]…長野県

　右の図のように，△ABC とその辺 BC を直径とする円がある。この円と辺 AB，AC とは，それぞれ点 D，E で交わっていて，AD ＝ 1 cm，DB ＝ AC ＝ 2 cm である。CD と BE の交点を F とするとき，次の各問いに答えなさい。



　ただし，答えに√をふくむ場合は，分母に√をふくまない形で答えなさい。
また，√の中は，最も小さな自然数となる形で答えなさい。

(1)5点，他各4点／計17点…県教委発表

(1)　△ACD ∽△FBD を証明しなさい。

(2)　CD の長さを求めなさい。

(3)　BE の長さを求めなさい。

(4)　△BCF の面積を求めなさい。

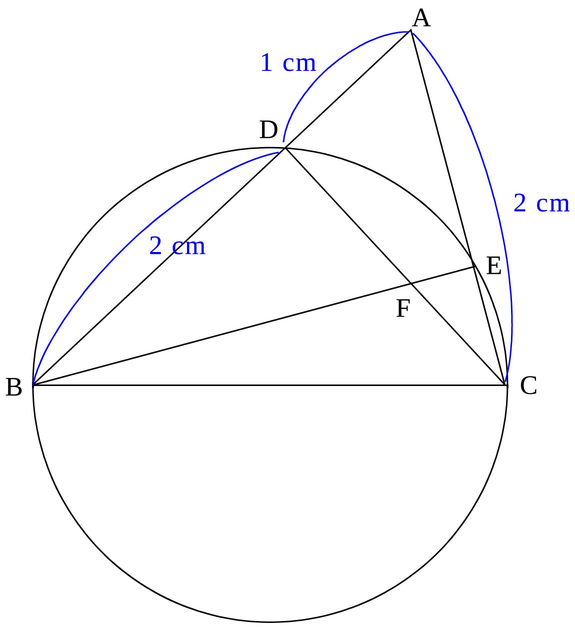
[実力診断問題]　解説・解答…手順を示すためにていねいに解説

今まで私のテキストでさんざん言ってきたように、文章題であろうが図形であろうが、**考えるには「考えられるようにする準備」**が必要です。それは、**図**をノートに大きくかき出して、その**図の中に問題文からわかることをすべて書き入れていく**というのが第一の作業ですね。

次に、**特に図形の証明では「何を証明するのか！」をはっきりさせること**です。**結論部分になることをはっきりさせ**れば、考えるのがとてもラクになります。**何事も目に見えるようにしてから(＝図にしてから)考えれば**、とても考えやすい。

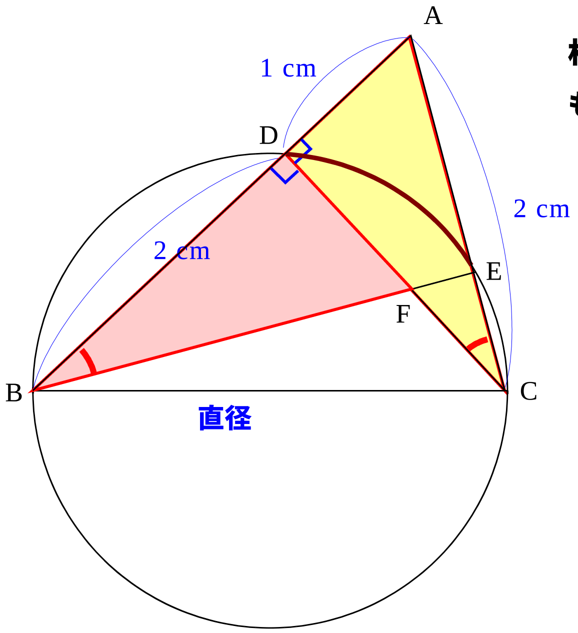
ということで、まずは図を大きくかき直してから、問題文に書いてあることの書き込みで始まります。

(1)【第１段階】…書いてあるままに



(2)【第２段階】…△ ACD ∽△ FBD **を意識して**

2 つの三角形をはっきりさせる。



〔思考の流れ〕

相似条件で当てはまるものを探す。

⇩

対応する辺の長さについての条件がない。

⇩

「2 角がそれぞれ等しい」しかない

⇩

円が絡めば円周角・中心角関係の定理しかない。

⇩

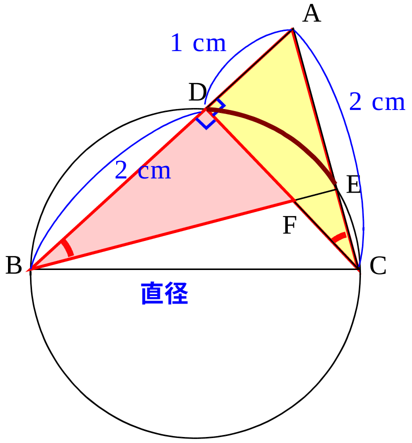
探そう！

わざわざ“直径”と書いてある ⇨ 直径に対する円周角は 90 °

∠ DBF と対応するのは∠ DCE ⇨ おっ、いずれも $\overset{\frown}{DE}$ の円周角

ここまで来て、やっと準備完了！
あとは書くだけ。
でも要領よく書くにはどんな順番で書くか考えよう！！

図を見ながら、証明を書いていこう。



△ ACD と△ FBD で

∠ ECD ＝∠ EBD（$\overset{\frown}{DE}$ の円周角）より

∠ ACD ＝∠ FBD …①

また∠ BDC ＝ 90°（直径の円周角）だ

から、∠ ADC ＝∠ FDB ＝ 90° …②

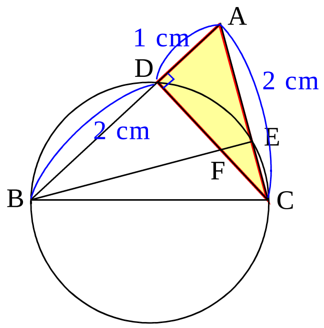
①と②から 2 組の角がそれぞれ等し

いので　**使った相似条件は必ず書く**

△ ACD ∽と△ FBD

（証明終わり）

（2）　CD の長さを求めなさい。



△ ADC に注目。

△ ADC は直角三角形。

三平方の定理より、$AD^2 + DC^2 = AC^2$

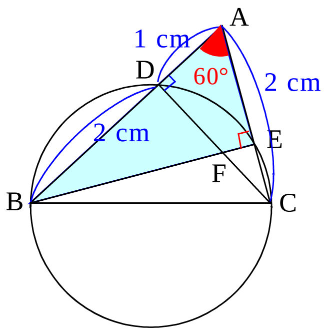
$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$

$= \sqrt{2^2 - 1^2}$

$= \sqrt{3}$ (cm)

※　本当は直角三角形で AC:AD ＝ 2:1 なので、∠ A ＝ 60° でかつ CD ＝ $\sqrt{3}$ というくらいは考えずに出てこなければいけない。

（3）　BE の長さを求めなさい。



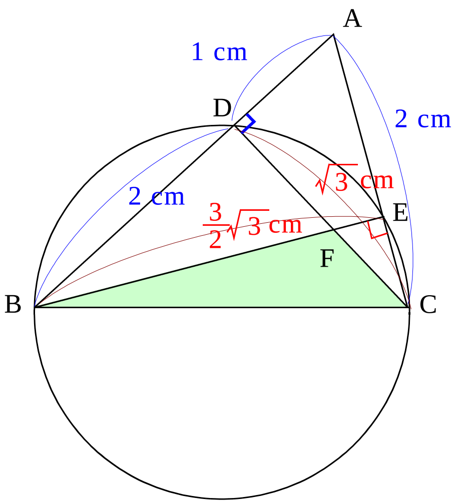
求め方は何通りもある。

△ ABE が∠ A ＝ 60° の直角三角形であることを使って、BE が AB の $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍を使うか、△ ABE ∽△ ACD から、

AB ＝ $\frac{3}{2}$ AC より BE ＝ $\frac{3}{2}$ CD

＝ $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm など。

(4)　△ BCF の面積を求めなさい。　**…(2)，(3)でわかったことを利用**



△ BCF の面積を出すには？

瞬間的(しゅんかんてき)にいろいろな方法が出る。
また出て欲しい。

【直接法】

△ BCF の面積を直接に計算

→“どれを底辺にするか”

BC がわからないので、BF **を底辺**にすると**高さは** CE

→ BF，CE を先に求めなければならない。**…面倒(めんどう)**

◎ **某(ぼう)出版社の解説はこの“面倒法”で解いていた。**

【間接法】

こうした問題は直接出そうとするより、間接的に求めることを考えた方がたいていはラクにできるようになっている。

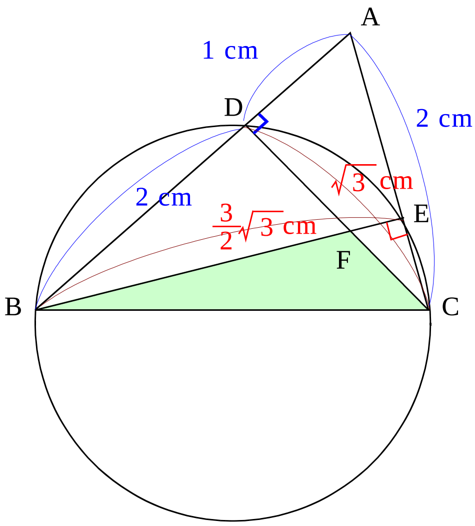
その１…△ ABC －(△ ADC ＋△ DBF)

△ ABC：底辺 AB，高さ CD
△ ADC：底辺 AD，高さ CD
△ DBF：底辺 DB，高さ FD

その２…△ DBC －△ DBF

△ DBC：底辺 DB，高さ CD
△ DBF：底辺 DB，高さ FD

ほかにもあるが、これより面倒になる。**【直説法】では**事前に求めなければならないものが２つだが、**【間接法】では１つ**で済む。また、**その１，その２では**、その２の方が**単純(たんじゅん)**であることがわかるだろう。ここまで検討するのだ。



【間接法その２】で解いてみよう！

事前に求めるのは FD だけだ。

(1)で証明した△ACD ∽△FBD を使えばたいしたことはない。

対応する２辺 DB(2cm)は DC($\sqrt{3}$ cm)の $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍になっているから、「FD も AD(1cm)の $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍になる」というだけである。

$$FD = \frac{2}{\sqrt{3}}AD \quad (AD = 1\text{cm})$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}$$
←分母の有理化

$$\triangle BCF = \triangle DBC - \triangle DBF$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \cdots (\frac{\sqrt{3}}{3}\text{でも可})$$

←△BCDに $\frac{FC}{DC}$ を掛けて出してもＯＫ

これを**某出版社の【直接法】の解説**のようにやると、かなり面倒な計算が必要になり、もう十分な**難問の部類**に入ってしまう。**「難問」にするか、「やさしい問題」にするかは**、**たいていは自分自身の解き方にかかっていると言っていい**。

みんなもいろいろな問題集で入試実戦問題を解いていることだろう。そしてわからなかったときにはその解説を読んでわかろうとするのだろう。しかし、その解説を“絶対”とは思わないでくれ。**ちょっと考えればやさしい問題なのに､それをやたらめんどくさくして解くような解説もかなり存在する。**

ふだんの勉強では、自分の解き方と解説流で***“どちらの方がラクか!?”*** **喧嘩(けんか)するくらいの気概(きがい)**が欲しいものだ。

総合問題とは何か!?

総合問題とは、文字通り「総合」問題です。***“ 今までに習ったすべての分野の知識を動員して考えなさいよ！”***ということですね。

入試問題は、「小学校～中３全範囲が勉強済み」という前提でつくられています。関数問題なのに、図形の知識を多く必要としたように、**図形問題でも図形の知識だけで済むとは限りません。問題作成側は、**とにかく少しでも目先を変えようとして、いろいろひねってきます。

だがしかし、難関私立高校入試を除けば**中学の教科書にない知識を使わなければならない問題は入試では絶対に出せないのです**…公立高校では“ 絶対！ ”。

それなのに***なぜ “ 難問 ” という言葉が存在するのか？***　ウロコ先生は断言します。

“ 中学数学に難問なんて無いのだ！ ”

“ みんなが勝手にそう思いこんでいるだけだ！！ ”

難問と言われる 正体 は、難しい知識を必要とするものではなく、**基本知識**単発で解けるのではなく、「それを**いくつか組み合わせて考え、やっと解答に至る**」という問題です。

だから、**基本知識**…図形問題では特に「**定義**」「**性質**」「**定理**」の理解と記憶を完全なものにしておき、**「合同」や「相似」をうまく使うこと**を考えるということに尽きます。とにかく『**組み合わせ能力**』**を養う勉強**をすることが肝要です。

闇雲にたくさん問題を解いても、そういう能力は身につきません。 **良問 をいろいろな角度**から考え、解き終わったら一問一問をふり返って「***どんな基本知識を使ったのか？***」と、**ふり返る余裕**が欲しいものです。

では、「実戦」に入ります。