目からウロコの数学講座

■大好評の目からウロコシリーズの第４弾

図形と証明

<<第２講座－１>>
中２範囲証明基礎編

*「これで君は**証明の基礎**はばっちし！」*

考える学習をすすめる会

http:// kangaeru.org/

学陽舎塾長 **城内 貴夫-著**

は・じ・め・に

図形問題というのは、多くのみなさんにとってそれ以外の数学の単元とはちがう世界のようです。定義，定理，性質，証明，…わけのわからないような言葉がずらずら出てきて、***「証明」なんて何をやっているのかさっぱりわからない***。言葉の１つ１つは日本語らしいけど、いったい何をやっているの？

こう言いたい諸君があとを絶ちません。ウロコ先生にはその気持ちがよ～くわかります。

でも、そのように言う諸君、**結局は図形問題がわかるようになりたいんだろう？**　大丈夫。それぞれの**言葉の意味**をはっきりさせ、**何をやっているのかが**わかればいいわけだ。

今までの目からウロコの数学講座のように、一講座で基礎～ハイレベルまでというわけにはいかない。**基本をみっちり解説**し、**基本問題だけに絞る**ことによって、ようやく基本がわかるからだ。だから今までとは構成を変えて、図形編では『基礎』と『応用』に分けました。まず基礎がなぜ基礎なのかをわかり、そのあと『応用編』に行きましょう。**したがって、問題は基礎問題に限定して解説を詳しくしています**。**応用問題・難問は『応用編』で!!**

本書ではまず「教科書よりももっと基本を確実に理解する」を目標にします。

＝ 第２講座-１　目次 ＝

本書の内容を本当に理解するために

①　このテキストや問題集の図をそのまま利用せず、必ずノートに大きく拡大してかき写すこと。大きくするのは、問題文に書いてある条件を色分けや記号化してそこに書き入れるためだ。

②　与えられた図は、たいてい最終の完成図である。その図を順番メチャクチャに写すのではなく、問題文に書いてある手順どおりにかいていくこと。なぜなら、その順番が問題解決のヒントになっていることが多いから。

③　筆記用具では、最低 3 色は欲しい。

- 問題文から直接わかる条件は黒で書き入れる。
  これは証明のとき「仮定」と書けば済む部分だ。
- 与えられた条件からわかること(例えば「二等辺三角形」とあれば、直接にわかることは『2 辺が等しい』だが、そこからその性質として『2 底角』が等しいが出る)は、青で書き入れる。この青の部分は証明で書くときに「理由」を添える必要がある事項だ。
- 証明の 対象 (結論)部分は、赤線か赤の記号を入れる。
  これは、結論なので証明の理由としては使えない部分だ。

このように色分けしただけでも、ずっとわかりやすく整理できる。

④　書き方については、ウロコ先生の書き方とすべてが同じである必要はない。ウロコ先生の書き方は、「こう書いたら、誰が採点しても文句をつけることができない！」という、必要最小限のものだ。よかったらマネをして欲しい。

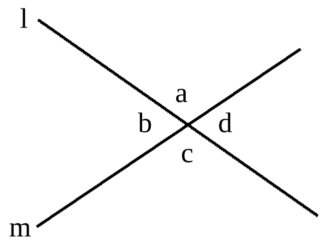
⑤　以上のことを守れば、図形用のノートは見て大きくスッキリしているし、一冊のノートが終わるスピードがとても速い。上達しないタイプの人ほど、図を小さくかき、書き入れでゴチャゴチャする。だからノートもちっとも終わらない。自分で損をしているのだ。「図をかかない」などは論外！

1．証 明 入 門

§1. 証明ってなんだ!?

[例題　1] …「対頂角は等しい(対頂角の性質)」の証明

　図のように、2 直線 l, m が交わってできる 4 つの角をそれぞれ a, b, c, d とする。このとき、交点を挟んで向かい合う角(例．a と c, b と d)の大きさは等しいことを証明しなさい。



[例題　1]　解説・解答

　2 直線が交わったとき、その交点を頂点と見立て、その**頂点を挟んで対する**(向き合う)**角**だから、**対頂角**と言う。

　証明とは何か？ということについてはあとで解説することにして、先に解答を示そう。

〔答　案〕…一例

　$\angle a = \angle c$ を示す。

　m は一直線だから $\angle a + \angle b = 180°$

　l も一直線だから　$\angle c + \angle b = 180°$

　　$\therefore \angle a = \angle c$

　同様にして、$\angle b = \angle d$

　以上から、2 直線の交点を挟んで向かい合う角の大きさは等しい。

　さて、「証明をしなさい」と言われて、このようにスラスラ答案を書けるようなら苦労はしない。だいたい、ウロコ先生のこの講座を買う必要もないね。

この基礎編は、この〔答案〕を読んでも????という諸君のためのものだ。

「証明って、何をすることなのか？」がはっきりわかればいいんだが…それがわかるようになることをウロコ先生がお手伝いしていこう。

証明ってなんだ?! …**「風が吹けば桶屋が儲かる？」**

諸君は「風が吹けば桶屋が儲かる？」って話を聞いたことがあるかい？

風とはもちろんあのぴゅーぴゅー吹く風のことだ。**風が強く吹けば→桶屋が儲かる**らしい。今は「桶」を見かけることがほとんど無くなってしまったが、風呂桶などと言う、あの桶だ。昔は風呂だけでなく、味噌や醤油、食料を桶に入れて保存しておくことが多かった。

さて、**風が吹くこと**と**桶屋が儲かる**(繁盛する)**こと**がどのようにつながるのか？　それをウロコ先生が証明しよう。古典の勉強にもなるだろう、現代の頭で考えたらダメだよ。

風が吹く→砂ぼこりがたつ→ほこりが多くの人の目に入る
→目が傷つき、目の病気で目が見えなくなる人が増える
→そうしたら、三味線弾きが増える(注.1)
→三味線の注文が増える→猫が減る(注.2)
→天敵のネズミが増える→ネズミは桶をかじる(注.3)
→桶をかじれば穴があき、桶の注文が増える→桶屋が儲かる

(注.1) 昔は失明すると、あんまさんになるか三味線弾きになるかしか、主だった職業がなかった。

(注.2) 三味線は猫の皮を使ってつくる

(注.3) 昔は味噌などの食料は桶に入れて保存することが多かった

ほら、2 つのことがつながったろう！　**途中経過に文句がなければ**、与えられた条件 (**仮定**)…この場合は「風が吹く」…から無理なく**結論**…「桶屋が儲かる」…まで行ったことになる。

このようにして、何か与えられたこと(仮定)があるなら、そこから言える発展的なこと(性質，定理)を次々に使って最後に言いたいこと(結論)までたどりつくことを『証明…証して明らかにする』という。

さて、それでは**上の「風が吹けば桶屋が儲かる？」は、数学的な意味で証明できたといえるか？**といったら、それは「証明になっていない」と言うしかない。話としては面白いが、**数学的証明には、途中の性質や定理は例外のない、100 %確かだと言えることしか使ってはいけない**からだ。

たとえば、砂ぼこりが目に入ったとして 100 %またはそれに近い確率で目が見えなくなるとは経験事実に反している。**いい加減なことの連続**で結論までつなげてしまった。

でも、有名な話だから、覚えておいてよ！　**ちょっと途中経過がいい加減な話のこと**を**「風が吹けば桶屋が儲かる的な話だ！」**と言うことがあるからね。

〔答案〕に戻って

さて、**答案とは何か？**　それは、諸君が**仮定→(途中経過)→結論の過程がわかっていることをプロである採点者に示すこと**だ。相手は素人ではなくその道のプロなのだから、友達に説明してあげるときとは当然ちがって、**「必要最低限のこと」がすべて盛り込まれていれば**よい。

必要最低限とは、プロがその答案の文面をたどったときに、「これはどうして言えるの？」という疑問が出ないように書くということだ。

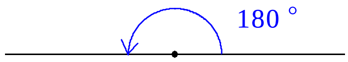
「どうして？」を言わせないために必要なのは、書いたこと 1 つ 1 つの根拠(理由)を必ず添えることである。但し、証明が済んでいる定理を使うなら、「**〇〇の定理より**」というのがりっぱな理由になる。

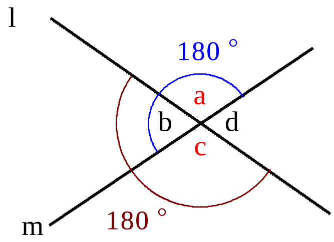
［例題　１］の答案の徹底分析

さて、このようなことから、先の答案がなぜ答案といえるのかを徹底分析してみよう。それがわかれば、君たちは証明とは何を考え、そのうちの何が書くべきことなのかが、おぼろげながらつかめるだろうから…

〔絶対に確かなこと〕

・直線の角度は 180° である。





・もともと等しい 2 つのものから共通の数をひいたものは等しい **(等式の性質)**

A ＝ B ならば A － C ＝ B － C

これの変形で、A ＋ C ＝ D,　B ＋ C ＝ D ならば A ＝ B

そして、これを予備知識に図を見れば、b が共通になっていると気づく。

〔 答　案 〕…一例

$\angle$ a ＝$\angle$ c **を示す。**

m **は一直線だから** $\angle$ a ＋$\angle$ b ＝ 180°

l **も一直線だから** $\angle$ c ＋$\angle$ b ＝ 180°

∴$\angle$ a ＝$\angle$ c

同様にして、$\angle$ b ＝$\angle$ d

以上から、2 **直線の交点を挟んで向かい合う角の大きさは等しい。**

書き方はいろいろあるから、$\angle$ a ＝ 180° －$\angle$ b,　$\angle$ c ＝ 180° －$\angle$ b

∴$\angle$ a ＝$\angle$ c　　と書いてもよい。

誰からも文句をつけられない書き方ならよいのだ。それが証明！

[例題　２]…三角形の内角・外角の性質

> ①　三角形の 3 つの内角の和は 180° になることを証明しなさい。
> ②　三角形の 2 つの内角の和は、残りの角の外角に等しいことを証明しなさい。

[例題　２]　解説・解答

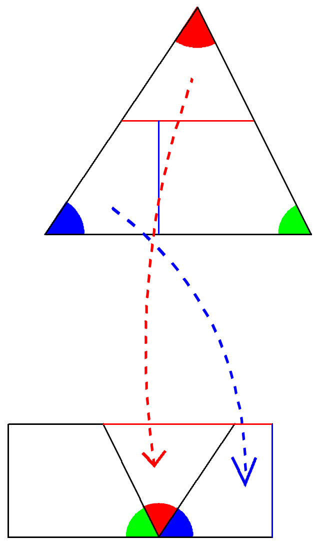
①　**これは、諸君の頭では“絶対に確かなこと”として受け取られていたのではないか？**　しかし、一直線は 180° …(これは約束事)というのと違って、**「三角形の内角の和は 180°」というのは、約束事ではない。**証明の対象になる事柄だ。

もちろん以後のいろいろな証明では「三角形の内角の和は 180°」というのは証明なしに使ってよいが。**基礎編では**、なるべくこうした当たり前のことを題材に証明対象として、**当たり前の事柄の「なぜ？」がわかるようにしていこう**。

小学生のときは三角形の 3 つの角をハサミで切り離して組み合わせ、3 つの角を合わせたら一直線、つまり 180° になることを確かめたね。

しかし、それじゃあ証明とは言えない。なぜなら、一直線ではなく、微妙に違うかもしれないじゃあないか。

見た目で一直線になっているだけかもしれない。数学の世界では、「そう見える」は通用しないんだ。理詰めできちっとしなければ…

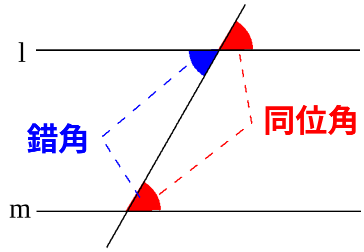


たぶん一直線！…180°

〔絶対に確かなこと〕

・2 **つの平行線がつくる同位角どうしは、それぞれ等しい。**

・2 **つの平行線がつくる錯角どうしは、それぞれ等しい。**



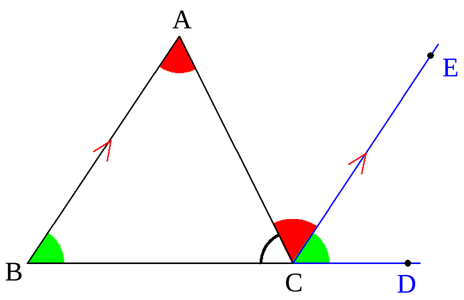
くり返すが、**数学の証明の途中経過で使ってよいのは、「絶対に確かなこと」だけだ。**「絶対に確かなこと」のうち、“この問題では何を使うか？”を探し出す訓練をすることが**図形のセンス**を磨くことになる。

…初めのうちは「マネ」から始めるしかないが。

そして、この**平行線について言える事柄**を使えば、三角形の内角の和が 180° であることを証明することができる。***“平行線なんてどこにもないじゃないか？”***と言うなら、そのような線を補充してあげればよい。このように、**証明のための補助として新たに引く線を補助線**という。

補助線は、自分で勝手に引く線だから、どのように引いたのかを必ず答案に示さなければならない。それが、**採点者への思いやり**である。

〔答案〕



↓補助線や新たにとった点の説明

△ ABC の辺 BC を C 側に延長し、その上に点 D をとる。

また、C から BA と平行な直線を引きその線上に点 E をとる。

…このようにしないと、必要な角を表せない

<u>BA//CE</u> だから、∠ A ＝∠ ACE(<u>錯角</u>),

∠ B ＝∠ ECD(<u>同位角</u>)

↑ BA//CE，かつ錯角，同位角であることが、それぞれの角が等しい根拠になっている。

$$\angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACE + \angle ECD + \angle ACB$$
$$= \angle BCD$$

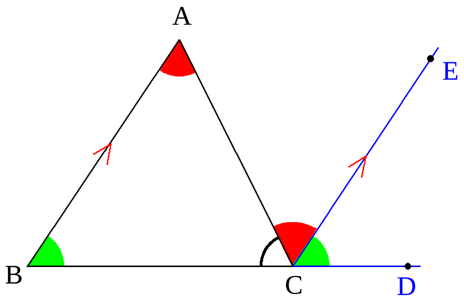
ここで、B, C, D は一直線上にあるから、$\angle BCD = 180^\circ$

以上から、三角形の 3 つの内角の和は 180° である。

〔注意！…角の表し方〕

ここでたくさんの角が登場した。あるものは 1 つの文字で、そしてあるものは 3 つの文字を使った。

なぜ、こうしなければならないのか？



△ ABC の内角を問題にしている以上、∠ A, ∠ B については誰が見ても と の部分の角と受け取ってくれるだろう。だから省力化して∠ A, ∠ B と書いても、誤解が起きない。

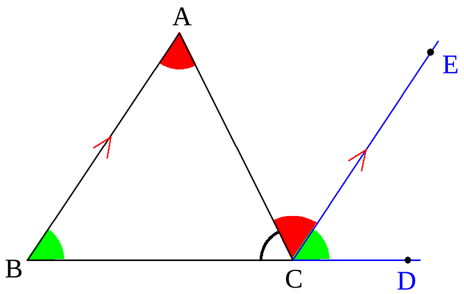
もちろん、∠ A →∠ BAC,　∠ B →∠ ABC と書いてもかまわない。しかし、書く量は少ない方が、書く側も読む側もラクであり、ラクな方がお互いのためだ。

ところが、∠ C だけは困る。C 点が中心になる角はたくさんとれる。だから、∠ ACE と書けば、A → C → E と目を動かしたときに「AC と CE で挟まれてできたところの角だよ」と、他の角と区別することができる。

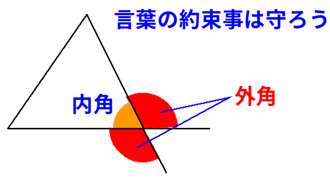
「読む人の立場になって書く」という思いやりが証明には必要だ。

② **三角形の 2 つの内角の和は、残りの角の外角に等しいことを証明しなさい。**

〔答案〕 ①の図をそのまま利用(りよう)すると、



外角…外側一周ぶんではない



BA//CE だから、$\angle A = \angle ACE$(錯角),

$\angle B = \angle ECD$(同位角)

↑ BA//CE，かつ錯角，同位角であることが、それぞれの角が等しい根拠になっている。

したがって、$\angle A + \angle B = \angle ACE + \angle ECD$

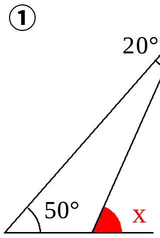
$= \angle ACD$

となり、三角形の 2 つの内角の和は、残りの角の外角に等しい。

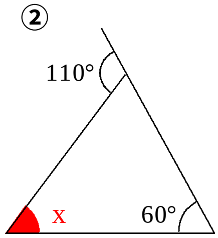
この定理は、三角形がからむいろいろな角度問題で頻繁(ひんぱん)に使われる。重要性がきわめて高い定理だ。

〔例〕次の図で∠ x の大きさを求めなさい。

①



②



① $x = 50° + 20°$

$= 70°$

② $x = 110° - 60°$

$= 50°$

全部内角で計算するよりも、

よほど速い。

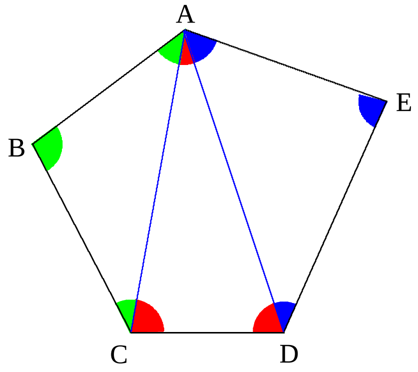
[例題　３]…**多角形の内角の和・外角の和**

> ①　**五角形の内角の和は何度か、また外角の和は何度か。**
>
> ②　**また、それを一般化し** n **角形の内角の和は** 180° ×(n − 2),
> **外角の和は** n **にかかわらず** 360° **であることを証明しなさい。**

[例題　３]　解説・解答…多角形は三角形が集まったもの。まず三角形で言えること
の利用を考える。→三角形に分解

①　五角形の内角の和,外角の和

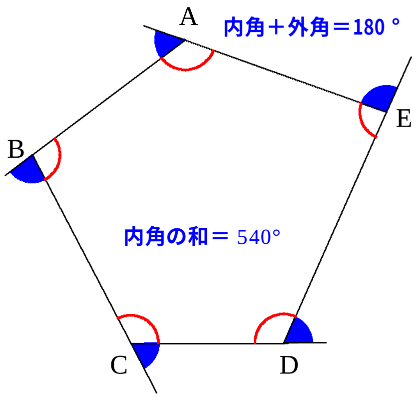
内角の和



五角形のままでは考えようがない。
頂点 A から対角線 AC,　AD を引くと
3 つの三角形ができる。
(Aから隣り合うB，Eには対角線は引けない)

すると、図を見ればわかるとおり、
五角形の内角の和は、3 **つの三角形の**
内角の和に等しいので、
180° × 3 ＝ 540°

外角の和



どの 1 つの外角の大きさもわかって
いないので、直接に合計することは
できない。
1 **つの内角＋外角＝** 180° で、それが
5 つ。そこから内角の和を引けばよい。

180° × 5 − 540° ＝ 900° − 540°
＝ 360°

①　n 角形の内角の和… $180^\circ \times (n-2)$ の証明

〔答案〕

n 角形では 1 つの頂点からその**両側の点を除く対角線が $(n-3)$ 本**引ける。そして、$(n-3)$ 本の対角線は n 角形を**$(n-2)$ 個の三角形**に分ける。

したがって、n 角形の内角の和は、$180^\circ \times (n-2)$ である。

> **↑　まるっきりふつうの説明になっているが、文句はつかないだろう。これも立派な証明なのだ。みんなはこのことを四角形，五角形，六角形くらいまでは図をかいて、本当にそうかどうか調べよう。**
>
> **「かいて納得する」ということの積み重ねが、図形のセンスを鍛えていくのだ。**

①　n 角形の外角の和… 360° の証明…五角形でやったと同じ手法

〔答案〕

n 角形では 1 つの内角と外角の和は 180°。

それが n 個だから全部で $180^\circ \times n$

また、内角の和は $180^\circ \times (n-2)$ だから、

外角の和は

$$
\begin{aligned}
&180^\circ \times n - \{180^\circ \times (n-2)\} \\
&= 180n^\circ - 180n^\circ + 360^\circ \\
&= 360^\circ
\end{aligned}
$$

←ありゃぁ、決まった数字になっちゃった！

> **このことから、内角の和は何角形かによって変化するが、外角の和は変化しない、常に 360° であることがわかる。**
>
> **角度問題では、内角を使うよりも外角を使って計算した方がラクだということがかなりある。**

§2. 三角形の合同

合同とは？

「重ね合わせれば、ぴったり同じになる図形」といっていい。**言葉の定義は、なるべくその専門用語を分解して自分でつくるものだ。**字から離れて本のとおり覚えても、長く覚え続けられるものじゃない。

「重ね合わせればぴったり同じになる図形」と言ったら、それはどんな条件を満たしているんだろう？　こうしたことを自分で考えていくんだ。間違っても「どう習ったのかな？」と思いだそうなんてしないこと！

図形はどういう基準で見たらいいか？

① **形**
② **大きさ**

この2つしかないんじゃないだろうか。

合同とは、「**形と大きさが等しい図形**」とも言えるだろう。

三角形の合同条件

① 3辺(の長さ)がそれぞれ等しい … 〔三辺相等〕
② 2辺(の長さ)とその間の角がそれぞれ等しい … 〔二辺挟角相等〕
③ 1辺(の長さ)とその両端の角がそれぞれ等しい … 〔二角挟辺相等〕

これをただ覚えるのではなく、その意味を考えよう！

なんでこれが合同条件になるのだろう？

三角形というのは、「3つの辺でできている図形(三辺形)」とも「3つの角でできている図形(三角形)」とも言えるわけだ。

このうち、三角形の**「大きさ」を指定するには辺の長さで指定**するしかない。**角度だけでは**三角形の大きさが決まらない。だから、**合同条件にはどこにも最低限で「1辺の長さ」は入っている**。…**大きさを決める条件**

角は、**形**を決めるには役立つが、**大きさ**を決める役には立たない。

①の 3 辺の長さが決められれば、コンパスを使って 1 つの決まった三角形が描ける。

②の 2 辺の長さとその間の角が決められれば、1 つの決まった三角形が描ける。このとき、2 辺の間の角でなければならないことを各自作図して確かめよ！

③の 1 辺とその両端の角が決められれば、1 つの決まった三角形が描ける。このとき、1 辺の両端の角でなければならないことを、各自作図して確かめよ！

何でも自分で確かめてみなければ、本当の納得は得られない。こうしたことに手間暇を惜しんではいけない。単なる覚えた知識というのは、まったく応用が利かないのだ。

こうして、**大きさ**と**形**が決められたものどうしが等しければ、それは重ねてもぴったり同じになる。だから、合同条件として言えることになるんだ。

どの合同条件も、辺の長さについてと角の大きさについて、**合計 3 つの事柄**で成り立っていることに注目しよう。

整理

辺	角
3 辺の長さ	必要なし(0 角)
2 辺の長さ	その間の角(1 角)
1 辺の長さ	その両端の 2 角

2つの三角形の合同の証明

2 つの三角形が上の合同条件のどれかにあてはまれば、2 つの三角形は合同になるということだ。だから、問題文からわかっていること(仮定, そこからわかる性質など)から、**3 つの合同条件のどれに当てはまるのかを検討(けんとう)**し、当てはまる条件が決まったら、**それに当てはめて書いていけば**良いことになる。

証明は誰に対して書くのか？

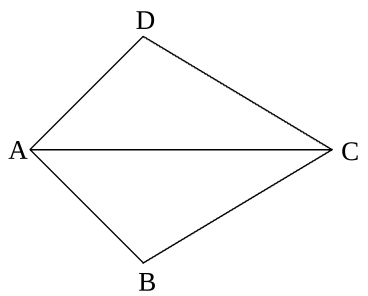
このことを意識している人は少ない。君たちの場合は、**テストの採点者(さいてんしゃ)**に対してである。採点者が読み進める中で、書かれたもののどれについても「なぜそう言えるの？」と一瞬(いっしゅん)でも悩(なや)ませず、かつ必要最小限で書かれたものが優秀答案ということになる。

「何を書けばいいの？」とよくきかれるが、そんなのは「**採点者にわかってもらえるように**、**必要最小限のこと**を**根拠(こんきょ)**を示しながら、**流(なが)れ**のあるように書く」としか答えようがないじゃないか！

そうしたことを、問題演習(えんしゅう)をしながら身(み)につけていこう。

[例題　1]

四角形 ABCD **で、**AB ＝ AD, BC ＝ DC **ならば,** △ ABC ≡△ ADC **であることを証明しなさい。**



[例題　1]　解説・解答

あれ、もう証明を書き始めるの？…最悪(さいあく)

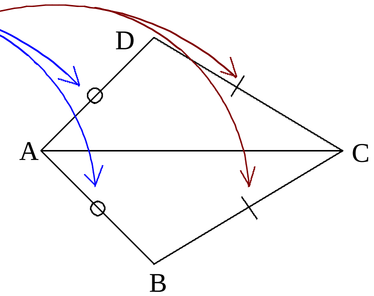
方程式の文章題解法でも触(ふ)れたとおり、**問題文を読んで図を見ていきなり答案を書き始めようなんて、100 年早い！**　そんなことをしてたら、**複雑(ふくざつ)な問題になったとき**に君は**達磨(だるま)さん**(手も足も出ない)になってしまうぞ。

①まず、問題文に書かれていること(仮定)を図にかき、書き入れよう。

そうしないと、**どんな合同条件を使ったらいいか**わからないじゃないか。

ある図を利用するのではなく、**自分でかくこと**が重要なんだ！

四角形 ABCD **で、**AB ＝ AD, BC ＝ DC **ならば,** △ ABC ≡△ ADC **であることを証明しなさい。**



辺の長さが等しいことを表す何かの 印(しるし) を入れる。…何でもいいよ

そして、**その図を見て何がわかっているかを見る**。たいていは何かが足りなくなっている。

2 **辺がそれぞれ等しいこと**が見えているね。それなら合同条件に当てはめると

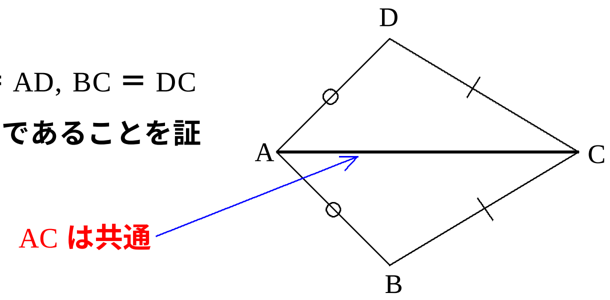
2 **辺がそれぞれ等しい** → **① その間の角がそれぞれ等しいか？**
→ **② 残りの辺がそれぞれ等しいか？**

のどちらかしかないはず。

仮定(問題文で明示してある条件)からは①, ②のどちらもわからない。ただ、②については何も書いてない。「等しく見える」というのは根拠にならないよ。では、②にしかならないはず。**よく見れば(よく見なくても)辺** AC **は** 2 **つの三角形両方の 共通(きょうつう) な** 1 **辺になっているじゃないか！**それなら等しいさ。

「共通」という理由でね。

四角形 ABCD **で、**AB ＝ AD, BC ＝ DC **ならば,** △ ABC ≡△ ADC **であることを証明しなさい。**



これで合同条件の『三辺がそれぞれ等しい』を使えることが確定した。あとは書くだけ。書く前に図に書き入れて、**これだけの準備をして、見込み(みこ)がついて、はじめて書き出し始めることができるんだ**。

②次の課題は「どう書くか」ということだね。見本(みほん)を示そう。書き方はいろいろあるから、これとまったく同じでなくてもいいが…

〔 答 案 〕

△ ABC と△ ADC で　←何について書くかの予告

AB ＝ AD　(仮定) …①　←"仮定より"として書き始めてもよい

BC ＝ DC　(仮定) …②

AC は共通　…③　←AC＝AC(共通)と書いてもよい

①, ②, ③から 3 辺がそれぞれ等しいので　←使った合同条件を書く

△ ABC ≡△ ADC　//　←結論。// は"証明終わり"の記号。なくてもよい

注意点

・最初は必ず「何について書こうとしているのか」という、**主人公(しゅじんこう)を予告(よこく)**しなければ、採点者が困る。

・三角形や辺, 角の取り方は必ず**対応(たいおう)**させる。
例(たと)えば、△ ABC と取ったらもう一つの三角形を△ CDA などとしてはいけない。**図形では、この対応関係がとてもうるさく見られる。**

対応…ぴったり重ね合わせたときに重なる点どうしのこと。

・**書いた 1 つ 1 つのことについて責任を明らかにするために**、それぞれに必ず**根拠（こんきょ）(そう言える理由)**を書かなければ、採点者が「なんで？」と言いたくなる。

　採点者が「なんで？」と言わなくて読み進めることができる書き方が、“文句をつけられない答案”なのだ。この点多くの教科書や問題集の模範解答（もはんかいとう）にはいいかげんなものがときどき見られる。みんなは厳格（げんかく）になろう。